

工学博士 原田 耕介
工学博士 二宮 保介
顧問 文 建

共著



コロナ社

資料 1

先端科学特別講義 (2015.1.14)

3

状態平均化法

スイッチング方式 DC-DC コンバータはスイッチがオン・オフを繰り返しているため、回路は非線形となり、その動作解析は非常に複雑になる。しかし、DC-DC コンバータは直流電力を得るため、低域周波数フィルタを用いており、通常、スイッチング周波数が回路の固有周波数に比べて十分高く選ばれる。そのため、1 スwitching 周期当りにおいて、リアクトル電流およびコンデンサ電圧の変化は折れ線で近似できる。このような場合、電流または電圧の 1 スwitching 周期当りの平均値を変数とすることにより、スイッチを含む非線形回路に対しても、線形的な取扱いが可能となる。このような DC-DC コンバータの線形近似による動作解析法を状態平均化法 (state space averaging method) と呼んでいる。本章では、その原理を述べる。

3.1 状態平均化方程式

いま、コンバータを構成する半導体スイッチが図 3.1 に示すように、オン・オフ動作を繰り返すとする。それぞれの状態に対する回路が線形回路であり、各回路に基づき、つぎのような状態方程式 (state equation) と出力方程式 (output equation) が得られたとする。

状態 I (スイッチがオンのとき) に対し

$$\frac{dx(t)}{dt} = A_1 x(t) + b_1 V_i \quad (kT_s \leq t \leq kT_s + T_{on}) \quad (3.1)$$

$$y(t) = c_1 x(t) \quad (3.2)$$

状態 II (スイッチがオフのとき) に対し

$$\frac{dx(t)}{dt} = A_2 x(t) + b_2 V_i \quad (kT_s + T_{on} \leq t \leq (k+1)T_s) \quad (3.3)$$

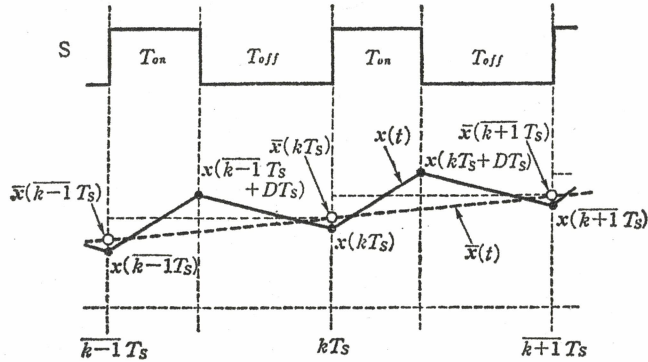


図 3.1 スイッチの動作とコンバータの状態変化

$$y(t) = c_2 x(t) \quad (3.4)$$

ここで、状態ベクトル $x(t)$ の各要素となる状態変数には、リアクトル電流やコンデンサ電圧などの連続量が選ばれる。 $y(t)$ はコンバータの出力を表している。出力は状態変数の要素そのものと一致しないこともあり、そのとき、式 (3.2), (3.4) のように、出力は状態変数の各要素の線形的な結合で表せる。また、 A_1 , b_1 , c_1 , A_2 , b_2 , c_2 はそれぞれ回路パラメータにより決定される係数行列であり、 V_i は直流入力電圧を表す。コンバータ回路の固有周波数に比べてスイッチング周波数が十分高いときには、各微小期間 T_{on}, T_{off} における状態変数の変化を図 3.1 に示すように、直線で近似することができ、各期間の最終値は

$$x(kT_s + T_{on}) = x(kT_s) + \frac{dx(t)}{dt} \Big|_{t=kT_s} \cdot T_{on} \quad (3.5)$$

$$x(\overline{k+1}T_s) = x(kT_s + T_{on}) + \frac{dx(t)}{dt} \Big|_{t=kT_s+T_{on}} \cdot T_{off} \quad (3.6)$$

と表される。式 (3.5), (3.6) の微分係数に式 (3.1), (3.3) を用いると、

$$\begin{aligned} x(kT_s + DT_s) &= x(kT_s) + DT_s[A_1 x(kT_s) + b_1 V_i] \\ &= [I + DT_s A_1] x(kT_s) + DT_s b_1 V_i \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} x(\overline{k+1}T_s) &= x(kT_s + DT_s) + D'T_s[A_2 x(kT_s + DT_s) + b_2 V_i] \\ &= [I + D'T_s A_2] x(kT_s + DT_s) + D'T_s b_2 V_i \end{aligned} \quad (3.8)$$

が得られる。ただし、 I は単位行列を表す。式 (3.8) において、 $\overline{k+1}$ を k

に置き換えると、

$$x(kT_s) = [I + D'T_s A_2] x(\overline{k-1}T_s + DT_s) + D'T_s b_2 V_i \quad (3.9)$$

が得られる。これを式 (3.7) に代入し、2次の微小項を無視して整理すれば、

$$\begin{aligned} x(kT_s + DT_s) &= (I + DT_s A_1 + D'T_s A_2) x(\overline{k-1}T_s + DT_s) \\ &\quad + (DT_s b_1 + D'T_s b_2) V_i \end{aligned} \quad (3.10)$$

が得られる。同様に、式 (3.7) を式 (3.8) に代入し、2次の微小項を無視して整理すれば、次式が得られる。

$$x(\overline{k+1}T_s) = (I + DT_s A_1 + D'T_s A_2) x(kT_s) + (DT_s b_1 + D'T_s b_2) V_i \quad (3.11)$$

この式において、 $\overline{k+1}$ を k に置き換えると、

$$x(kT_s) = (I + DT_s A_1 + D'T_s A_2) x(\overline{k-1}T_s) + (DT_s b_1 + D'T_s b_2) V_i \quad (3.12)$$

が得られる。そこで式 (3.12) と式 (3.10) との和に $D/2$ を、式 (3.10) と式 (3.11) との和に $D'/2$ を掛けて、両者の和を取れば、

$$\begin{aligned} &\frac{D[x(kT_s) + x(kT_s + DT_s)] + D'[x(kT_s + DT_s) + x(\overline{k+1}T_s)]}{2} \\ &= (I + DT_s A_1 + D'T_s A_2) \cdot \\ &\frac{D[x(\overline{k-1}T_s) + x(\overline{k-1}T_s + DT_s)] + D'[x(\overline{k-1}T_s + DT_s) + x(kT_s)]}{2} \\ &\quad + (DT_s b_1 + D'T_s b_2) V_i \end{aligned} \quad (3.13)$$

が得られる。一方、状態変数を図 3.1 に示すように線形近似し、1スイッチング周期 T_s において状態変数の平均値 $\bar{x}(t)$ を求めると、

$$\begin{aligned} \bar{x}(kT_s) &= \frac{1}{T_s} \int_{k-1T_s}^{kT_s} x(t) dt \\ &= \frac{D[x(\overline{k-1}T_s) + x(\overline{k-1}T_s + DT_s)] + D'[x(\overline{k-1}T_s + DT_s) + x(kT_s)]}{2} \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \bar{x}(k+1T_s) &= \frac{1}{T_s} \int_{kT_s}^{k+1T_s} x(t) dt \\ &= \frac{D[x(kT_s) + x(kT_s + DT_s)] + D'[x(kT_s + DT_s) + x(\overline{k+1}T_s)]}{2} \end{aligned} \quad (3.15)$$

が得られる。したがって、式 (3.13) は状態変数の平均値 $\bar{x}(t)$ に関する方程式

$$\bar{x}(k+1)T_s = (I + DT_s A_1 + D'T_s A_2) \bar{x}(kT_s) + (DT_s b_1 + D'T_s b_2) V_i \quad (3.16)$$

となる。これはまた線形差分方程式

$$\frac{\bar{x}(k+1)T_s - \bar{x}(kT_s)}{T_s} = (DA_1 + D'A_2) \bar{x}(kT_s) + (Db_1 + D'b_2) V_i \quad (3.17)$$

に整理される。ここで、図 3.1 の太い破線で示されるように、離散変数 kT_s を連続変数 t に置き換え、この差分方程式を微分方程式

$$\frac{d\bar{x}(t)}{dt} = A\bar{x}(t) + bV_i \quad (3.18)$$

で近似する。ここで

$$\left. \begin{aligned} A &= DA_1 + D'A_2 \\ b &= Db_1 + D'b_2 \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

この方程式はスイッチのオン・オフの状態方程式 (3.1), (3.3) をオン・オフ時間に応じて平均した形で表されており、そのため、状態平均化方程式と呼ぶ。これは PWM コンバータの動作解析の上で基本的な方程式となる。ここで、式 (3.5) と式 (3.6) が得られたように、状態変数はオン・オフ期間の境界で連続であることが必要である。一方、コンバータの出力に関して、その平均値は

$$\bar{y}(kT_s) = \frac{1}{T_s} \left[\int_{k-1}^{k-1+DT_s} c_1 x(t) dt + \int_{k-1+DT_s}^{kT_s} c_2 x(t) dt \right] \quad (3.20)$$

となる。オン・オフ期間の状態変数を平均値 $\bar{x}(kT_s)$ で近似すれば、上式は

$$\bar{y}(kT_s) = (Dc_1 + D'c_2) \bar{x}(kT_s) \quad (3.21)$$

となる。したがって、

$$\bar{y}(t) = c\bar{x}(t) \quad (3.22)$$

となる。ここで、

$$c = Dc_1 + D'c_2 \quad (3.23)$$

出力もスイッチのオン・オフ時間に応じて平均した形で表される。

3.2 定常状態

定常状態では、リアクトル電流とコンデンサ電圧の平均値には変化がなく、直流値 X となり、次式が成り立つ。

$$\frac{d\bar{x}(t)}{dt} = 0 \quad (3.24)$$

上式を式 (3.18) に用いれば、定常状態におけるリアクトル電流とコンデンサ電圧は次式で求められる。

$$X = -A^{-1}bV_i \quad (3.25)$$

ここで、 A^{-1} は A の逆行列である。また、コンバータの出力は式 (3.22) より、

$$Y = cX = -cA^{-1}bV_i \quad (3.26)$$

と求められる。式 (3.25), (3.26) より、コンバータの電圧変換率、負荷特性、リップル率などの静特性 (steady-state characteristics) が求められる。

3.3 動 特 性

前項で述べた定常状態において、入力電圧、時比率、負荷抵抗などの微小変動 (perturbation) が生じた場合の低周波小信号動特性 (low-frequency small-signal dynamic characteristics) を調べる。

入力電圧 V_i 、時比率 D 、負荷抵抗 R などにそれぞれ微小変動 $\Delta V_i(t)$ 、 $\Delta D(t)$ 、 $\Delta R(t)$ を与えた場合、状態変数 $\bar{x}(t)$ に微小変動 $\Delta X(t)$ が生じる。式 (3.18) と式 (3.22) において $V_i \rightarrow V_i + \Delta V_i(t)$ 、 $D \rightarrow D + \Delta D(t)$ 、 $R \rightarrow R + \Delta R(t)$ に対し、 $\bar{x} \rightarrow X + \Delta X(t)$ 、 $\bar{y} \rightarrow Y + \Delta Y(t)$ とすると、

$$\frac{d(X + \Delta X)}{dt} = \left(A + \frac{\partial A}{\partial D} \Delta D + \frac{\partial A}{\partial R} \Delta R \right) (X + \Delta X) + \left(b + \frac{\partial b}{\partial D} \Delta D \right) (V_i + \Delta V_i) \quad (3.27)$$

$$Y + \Delta Y = \left(c + \frac{\partial c}{\partial D} \Delta D + \frac{\partial c}{\partial R} \Delta R \right) (X + \Delta X) \quad (3.28)$$

となる。時比率 D に対する行列 A , b , c の偏微分は式 (3.19), (3.23) より次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial D} &= \frac{\partial}{\partial D} [DA_1 + (1-D)A_2] = A_1 - A_2 \\ \frac{\partial b}{\partial D} &= \frac{\partial}{\partial D} [Db_1 + (1-D)b_2] = b_1 - b_2 \\ \frac{\partial c}{\partial D} &= \frac{\partial}{\partial D} [Dc_1 + (1-D)c_2] = c_1 - c_2 \end{aligned} \right\} \quad (3.29)$$

上式および定常状態を式 (3.27), (3.28) に代入し, さらに, 2次の微小項を無視して線形近似すると,

$$\frac{d\Delta X(t)}{dt} = A\Delta X + [(A_1 - A_2)X + (b_1 - b_2)V_i] \cdot \Delta D + b \cdot \Delta V_i + \frac{\partial A}{\partial R} X \cdot \Delta R \quad (3.30)$$

$$\Delta Y = c\Delta X + (c_1 - c_2)X \cdot \Delta D + \frac{\partial c}{\partial R} X \cdot \Delta R \quad (3.31)$$

となる。この式にラプラス変換を施せば, 平均値の微小変動分に対し, つぎの結果が得られる。

$$\Delta X(s) = (sI - A)^{-1} \left\{ b\Delta V_i(s) + [(A_1 - A_2)X + (b_1 - b_2)V_i] \Delta D(s) + \frac{\partial A}{\partial R} X \Delta R(s) \right\} \quad (3.32)$$

$$\Delta Y(s) = c\Delta X(s) + (c_1 - c_2)X \Delta D(s) + \frac{\partial c}{\partial R} X \Delta R(s) \quad (3.33)$$

これらの式に降圧形・昇圧形・昇降圧形の各回路に対応した係数行列 A_1 , b_1 , c_1 , A_2 , b_2 , c_2 を代入し, 出力電圧変動に着目すると, コンバータの伝達関数 (transfer function) が求められる。

以上求めた小信号動特性は式 (3.17) に示すスイッチング周波数でサンプリングする離散モデルを式 (3.18) に示す連続モデルで近似した平均化に基づくものである。微小変動の周波数はスイッチング周波数より十分低い場合 (一般的にはスイッチング周波数の 10 分の 1 以下), 小信号動特性が正確になる。

演習問題

(1) 状態変数の平均値を次式

$$\bar{x}(kT_s) \triangleq a \cdot x(k-1T_s + DT_s) + (1-a) \cdot x(kT_s)$$

と定義する。この場合, 式 (3.18) に示す状態平均化方程式が成り立つことを示せ。

参 考 文 献

- [1] 原田耕介, 二宮 保監修: “スイッチング電源技術”, 日本工業技術センター, 昭和 63 年
- [2] Y. Sun and I. T. Frisch: “Resistance multiplication in integrated circuit by means of switching”, IEEE Transactions on Circuit Theory, Vol. CT-15, No. 3, pp. 184~192, Sept. 1968
- [3] R. D. Middlebrook and Slobodan Cuk: “A general unified approach to modelling switching-converter power stages”, IEEE PESC' 76 Record, pp. 18~34, June 1976